*

Intepretasjonsresultater for noen modale predikatkalkyler.

*

Morten Rognes

1974

*

INNHOLD

Språket L*.....1
Avbildningen £;y fra L over i L*.....1
Referanser.....18

Språket L*.

I det følgende skal vi anta at L er et vanlig modallogisk språk, dvs. et standard første-ordens språk med identitet utvidet med den modale nødvendighets-operatoren Nec. Imidlertid skal L ikke inneholde funksjonssymboler. Reglene for konstruksjon av velformede formler er ellers som i modal predikatlogikk. Vi antar at L inneholder konstanter. Termene i L utgjøres derfor bare av konstantene og variablene i L.

I forbindelse med et slikt modallogisk språk L betrakter vi et første-ordens språk med identitet, L*, som oppfyller de følgende krav:

(i) Konstantene i L* er nøyaktig konstantene i L med tillegg av en helt spesiell konstant a;0.
(ii) Ethvert n-ært predikat i L er et n-ært predikat i L*
(iii) For ethvert n-ært predikat P i L inneholder L* et n+1'ært predikat [P] som ikke forekommer i L. Er P og Q distinkte predikater i L er [P] og [Q] distinkte predikater i L*.
(iv) I tillegg til predikatene nevnt under (ii) og (iii) inneholder L* et nytt monadisk predikat M, et binært predikat Alt, samt et binært predikat I. Vi forutsetter at ingen av disse predikatene forekommer i L og at de dessuten er forskjellige fra de predikatene som er nevnt under (ii) og (iii).
(v) Det forutsettes tilslutt at L* inneholder de samme logiske konnektivene som L bortsett fra modaloperatoren "Nec". De primitive logiske symbolene i L er derfor ¬, –> og A. De samme variabeltegnene brukes i L* og L. Disse er, tatt i alfabetisk rekkefølge:
"x", "y", "z", "w", "x'", "y'", "z'", "w'", "x"", "y"" ...

En formel av typen "M(x)" i L* leses "x er en mulig verden". Videre er det meningen at "Alt(x,y)" skal leses "x er en verden som er et alternativ til verdenen y", eller "x er en mulig verden som er mulig med hensyn på verdenen y". Formler av typen "I(x,y)" er det meningen at skal leses " x er en entitet som eksisterer i verdenen y" eller "x er et individ i y". Står P for eksempel for enplass-predikatet "– er en rød gjenstand" i språket L er det meningen at [P] skal stå for toplass-predikatet "– er en rød gjenstand i verdenen –" i L*. Leses derfor en formel "P(x)" i L som "x er en rød gjenstand" er det meningen at den korresponderende formel "[P](x,y)" i L* må leses "x er en rød gjenstand i verdenen y". Helt tilsvarende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med n-plass predikater der n>1. Er for eksempel Q toplass predikatet "– er mindre enn –" i L er det meningen at [Q] er et treplass predikat i L* som skal leses "– er mindre enn – i verdenen –". Leser man derfor "Q(x,y)" som "x er mindre enn y" må "[Q](x,y,z)" leses "x er mindre enn y i verdenen z".

Det kan være gunstig å ha en lesemåte for termen "L*" når L er et modallogisk språk. Vi skal lese "L*" som "det ekstensjonale korrelatet til det modallogiske språket L".

Avbildningen £;y fra L over i L*.

Anta at L er et modallogisk språk av den typen som ble nevnt ovenfor. Vi skal definere en avbildning £;y for hvert variabeltegn y i L som avbilder Fml(L), klassen av velformede formler i L inn i Fml(L*), dvs. klassen av de velformede formlene i det ekstensjonale

korrelatet til L. Funksjonen £;y er definert induktivt på lengden av formler i L på følgende vis:

Definisjon 1 Anta L er et modallogisk språk og y et variabeltegn i L. Da er £;y definert induktivt ved:

(i) £;y(P(a;1,....,a;n)) = [P](a;1,...,a;n,y) om P er et n-ært predikat i L og a;1,...,a;n er variabler eller konstanter i L.
(ii) £;y(¬F) = ¬£;y(F)
(iii) £;y(F–>G) = £;y(F) –> £;y(G)
(iv) £;y((Ax)F) = (Ax)(I(x,y) –> £;y(F))
(v) £;y(Nec(F)) = (Aw)(M(w) & Alt(w,y). –> . Konj/i,1,n/(I(a;i,w) & £;w(F))
der w er den først variablen etter y i den alfabetiske ordningen av variabeltegn og a;1,...,a;n er de fri variablene og konstantene som forekommer i F.

Som man ser er £;y for hvert variabeltegn y en oversettelsesfunksjon som oversetter enhver formel i L med en formel i L*.

I forbindelse med avbildningen £;y innfører vi de følgende hjelpebegreper:

Definisjon 2 T;y(F) = [Konj/i,1,m/(I(a;i,y)) –> £;y(F)] der a;1,...,a;m er de konstantene og fri variablene som forekommer i F og y er et variabeltegn i L

Definisjon 3 T;(a;0)(F) = (T;y(F));y[a;0] der y er den første variablen som ikke forekommer i F.

I det følgende vil vi også ha bruk for det følgende teorem som bevises ved et forholdsvis enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L:

Teorem 1 Anta L er et modallogisk språk og at FêFml(L). Anta variabeltegnet y ikke forekommer i F og at y er forskjellig fra x og a hvor x er et variabeltegn i L og a enten er en konstant eller et variabeltegn i L. Da gjelder:

£;y(F;x[a]) = (£;y(F));x[a]

Den følgende sats har også en viss interesse, men vil ikke bli brukt så meget i det følgende. Vi overlater beviset som en øvelse til leseren:

Teorem 2 Anta L er et modallogisk språk og at FêFml(L). Anta at y og z er variabeltegn som ikke forekommer i F. Da gjelder:

(i) (Ay)£;y(F) er en variant av (Az)£;z(F)
(ii) (Ay)T;y(F) er en variant av (Az)T;z(F)

Vi har også bruk for den følgende definisjon:

Definisjon 4 E;y(F) = [M(y) –> T;y(F)]

La oss på dette punkt benytte anledningen til å fiksere bruken av en del hyppig forekommende nøkkeluttrykk.

Anta L og L' er visse formallogiske språk. L kan eksempelvis være et modallogisk språk og L' kan være det ekstensjoale korrelatet til L i den betydning som ble forklart ovefor.

Med en intepretasjon av et språk L inn i et språk L' forstår vi en rekursiv funksjon π som avbilder Fml(L), mengden av formler i L, inn i Fml(L').

La L være et språk. Med en teori i L fortår vi da enhver delmengde X av formlene i L, dvs. enhver mengde X der vi har X Inkl Fml(L).

Anta nå at T, T' er teorier i henholdsvis L og L'. En intepretasjon av T inn i T' er da en intepretasjon π av L inn i L' som oppfyller det følgende krav:

(AF)(FêFml(L) & FêT –> π(F)êT')

Anta igjen at T,T' er teorier i henholdsvis L og L'. Med en troverdig intepretasjon av T inn i T' forstår vi en intepretajon π av L inn i L' som oppfyller det følgende krav:

(AF)(FêFml(L) –> (FêT <–> π(F)êT')).

Vi har introdusert disse begrepsdannelsene på dette punkt fordi de vil bli brukt temmelig ofte i det følgende.

La L være et språk for modallogikk. I det følgende er vi interessert i den første-ordens teorien i L* som har som ikke-logiske aksiomer formlene i L* som er med i mengden Ax(L*), der Ax(L*) er avgrenset ved den følgende definisjon:

Definisjon 5 La L være et modallogisk språk. Da betegner Ax(L*) mengden av alle de formler i L* som er instanser av de følgende skjemaer:

(i) M(a;0)
(ii) (Ax)(Ay)(I(x,y) –> M(y))
(iii) (Ay)(M(y) –> (Ex)(I(x,y)))
(iv) (Ay)(M(y) & [P](x;1,...,x;n,y) –> Konj/i,1,n/(I(x;i,y)))
(v) Konj/i,1,n/(I(x;i,a;0) –> (P(x;1,...,x;n) <–> [P](x;1,...,x;n.a;0)))
(vi) M(y) & I(x,y) –> [=](x,x,y)
(vii) M(y) & I(x;1,y) & I(x;2,y) & [=](x;1,x;2,y). –>
([P](z;1,..,z;(i-1),x;1,z(i+1),...,z;n,y) <–>
[P](z;1,..,z;(i-1),x;1,z(i+1),...,z;n,y))
(viii) I(x,a;0) & I(y,a;0) –> ([=](x,y,a;0) <–> x=y)
(ix) Alt(x,y) –> M(x) & M(y)
(x) M(y) & I(x;1,y) &I(x;2,y). –> ([=](x;1,x;2,y) <–> x;1=x;2)

Merk i denne forbindelse at aksiom (x) impliserer i lys av axiom (i) skjemaene (vi) – (viii). Vi kaller den første-ordens teorien i L* som har som ikke-logiske aksiomer formlene (i) – (v), samt (ix) og (x) for Δ.

Definisjon 6 Vi betrakter de følgende aksiomskjemaer i L i det vi antar at L er et modallogisk språk:

(i) F –> (G–>F)
(ii) (¬G –> ¬F) –> (F–> G)
(iii) (F–> (G –> E)) –> ((F–>G) –> (F–> E))
(iv) (Ax)F –> F;x [t] der det forutsettes at t enten er en variabel eller en konstant i L.
(v) (Ax)(F –> G) –> (F –> (Ax)G) forutsatt at x ikke forekommer fri i F.
(vi) x = x
(vii) x = y –> (F–> F') der F' er som F untatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x.
(viii) Nec(F–>G) –> (Nec(F) –> Nec(G))
(ix) Nec(F) –> (x≠y –> Nec(x≠y)) forutsatt at x,y forekommer fri i F.

(x) Nec(F) –> (x=y –> Nec(x=y)) forutsatt at x,y forekommer fri i F.
(xi) Nec((Ax)(x≠x)) –> Nec(F)

Vi betrakter de følgende slutningsregler:
R1 :– F & :– (F–> G) –> :– G
R2 :– F –> :– (Ax)F
R3 :– (F;1&....&F;n –> G) –> :– Nec(F;1)&...&Nec(F;n) –> Nec(G)
forutsatt at Fr({G}) Inkl Fr({F;1,...,F;n}) og
Konst({G}) Inkl Konst({F;1,...,F;n})
R4 :– F –> :– Nec(F) forutsatt Konst({F}) = Fr({F}) = ø

I definisjonen ovenfor betegner "Fr(Δ)" der Δ er en mengde med formler i L, mengden av alle de variablene som forekommer fri i formlene i Δ. "Konst(Δ)" betegner mengden av alle de konstantene som forekommer i formlene i Δ.

Definisjon 7 Vi kaller mengden av alle instanser av aksiomskjemaene (i) – (x) for mengden av K-aksiomene i L. Med Th;K forstår vi den minste mengden
X Inkl Fml(L) som er lukket under slutningsreglene R1 – R4 og som dessuten inneholder alle K-aksiomene i L.

Definisjon 8 La FêFml(L). Vi kaller da F for Δ;1-gyldig hvis og bare hvis
Δ:– E;y(F) for en eller annen variabel y som ikke forekommer i F.

Istedet for denne definisjonen kunne man kanskje også bruke:

Definisjon 9 Anta FêFml(L). Vi sette per definisjon: E;(a;0)(F) = (E;y(F));y[a;0].
Vi kaller da F for Δ;2-gyldig hvis og bare hvis Δ:– E;a;0(F) for en eller annen variabel y som ikke forekommer i F.

Definisjon 10 Vi betegner K-aksiomene i L med Ax;K

Vi skal bevise det følgende teorem:

Teorem 3 Anta FêAx;K og at y er en variabel som ikke forekommer i F. Da gjelder: Δ :– E;y(F).

Bevis: (a) Anta HêAx:K og at H er et av aksiomene (i) – (iii) som er nevnt i Definisjon 6. Det er da forholdsvis trivielt å se at Δ:– E;y(H) gitt at y ikke forekommer i H.
(b) Anta H = (Ax)F –> F;x[a] og at y er en variabel som ikke forekommer i H. Da har man:

E;y(H) = M(y) –> T;y(H)
= M(y) –> Konj/i,1,m/(I(a;i,y) –> £;y(H))
= M(y) –> Konj/i,1,m/(I(a;i,y) –> .
(Ax)(I(x,y) –>£;y(F)) –> £;y(F;x[a])

Vi må ha at a er en av a;i'ene. Anta derfor:
M(y) & Konj/i,1,m/(I(a;i,y) & (Ax)(I(x,y) –>£;y(F)). Da har vi I(a,y) og derfor åpenbart £;y(F);x[a]. I lys av Teorem 1 følger da £;y(F;x[a]). Dette er hva vi ønsker.
(c) Anta H = [(Ax)(F –> G) –> (F –> (Ax)G)]. Vi har da:
E;y(H) = M(y) –> T;y(H)
= M(y) –> Konj/i,1,m/(I(a;i,y) –>

((Ax)(I(x,y) –>. £;y(F) –> £;y(G)) –>.
£:y(F) –> (Ax)(I(x,y) –> £;y(G)))

Siden y ikke forekommer i H og x ikke forekommer fri i F ser man lett at
Δ :– E;y(H).

(d) Anta H = (Ax)(x=x). Da har man:

E;y(H) = My –> T;y(H) = My –> (Ax)(I(x,y) –> [=](x,x,y)). Men dette er åpenbart et teorem i Δ i lys av aksiom (vi) som er nevnt i Definisjon 5.

(e) Man beviser Δ:– E;y(x=z –>. F –> F') ved et induksjonsbevis. Man har om man setter H = [x=z –>. F –> F'] , i det det forutsettes at F' er som F untatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av z på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x, at

E;y(H) = M(y) –> Konj/i,1,m/(I(a;i,y)) –> ([=](x,z,y) –> (£;y(F) <–> £;y(F')))

Skal dette bevises ved induksjon, noe som forsåvidt er greit, må man betrakte de forskjellige tilfellene som oppstår ettersom F = P(b;1,...,b;n), ¬G, G–>H, (Aw)G og Nec(G). Dette behøver vi bare å gjøre dersom vi ser bort fra at aksiom (x) i Definisjon 5 inngår som ikke-logisk aksiom i teorien Δ. Men inngår dette som et aksiom er det meget lett å se at vi må ha Δ:– E;y(H) når man husker på at £;y(F) er nøyaktig som £;y(F') bortsett fra at den siste formelen inneholder noen, eventuelt ingen, fri forekomster av z på steder der den første har forekomster av fri x.

(f) H = [Nec(F–>G) –>. Nec(F) –> Nec(G)]

I dette tilfelle har vi:

E;y(H) = M(y) & Konj/i,1,m/(I(a;i,y)) –> (H1 –> (H2–>H3))

der

H1 = (Aw)(M(w) & Alt(w,y). –> . Konj/i,1,n/(I(a;i,w) & £;w(F–>G)) og hvor man videre har

H2 = (Aw)(M(w) & Alt(w,y). –> . Konj/i,1,r/(I(c;i,w) & £;w(F))

H3 = (Aw)(M(w) & Alt(w,y). –> . Konj/i,1,s/(I(d;i,w) & £;w(G))

hvor c;1,...,c;r er blandt a;1,...,a;n og det samme gjelder d;i'ene. Faktisk har man at {a;1,...,a;n} = {c;1,...,c;r}U{d;1,...,d;s}. Det er imidlertid lett å se at man må ha Δ :– E;y(H) siden £;w(F–>G) = £;w(F) –> £;w(G).

(g) Vi overlater verifiseringen av Δ :– E;y(H) til leseren om H er et av aksiomene (x) eller (xi) som er nevnt i Definisjon 6. Derimot vil vi se litt nærmere på aksiom (ix) i Definisjon 6. Vi har i dette tilfellet at

E;y(H) = M(y) –> Konj/i,1,p/(I(a;i,y)) –>.
(Aw)(M(w) & Alt(w,y) –> Konj/i,1,p/(I(a;i,w))&£;w(F)) –>
(¬([=](x,z,y)) –> (Aw)(M(w) &Alt(w,y) –>
(I(x,w)& I(z,w) & ¬([=](x,z,w)))))

Vi må ha at x og z er blandt a;i'ene. Anta derfor:

(1) M(y) & Konj/i,1,p/(I(a;i,y)) &
(Aw)(M(w) & Alt(w,y) –> Konj/i,1,p/(I(a;i,w))&£;w(F))

Anta videre (2) ¬([=](x,z,y)) og dessuten (3) M(w) & Alt(w,y) for vilkårlig w.
Fra (1) har vi M(y) & I(x,y) & I(z,y). Dette sammen med (2) og aksiom (x) i Definisjon 5 gir (4) x≠z. Fra (3) og den tredje konjunkten i (1) har man
I(x,w) & I(z,w) som i lys av (3), (4) og aksiom (x) impliserer ¬([=](x,z,w)) som er det vi ønsker.

Dette avslutter beviset for Teorem 3. **Q.E.D.**

Teorem 4 Vi har at klassen av Δ;1–gyldige formler i L er lukket under slutningsreglene R1 – R4.

Før vi gir beviset for denne påstanden er det hensiktsmessig å nevne de følgende

hjelpesetninger:

Lemma 5 Anta HêFml(L) og at y og z er variabler som ikke forekommer i H. Da har vi:
(i) Δ :– E;y(H) <–> Δ:– E;z(H)
(ii) Δ :– ((Ay)E;y(H) <–> (Az)E;z(H))

Bevis: Det er lett å vise at (Ay)E;y(H) må være en variant av (Az)E;z(H). **Q.E.D.**

Lemma 6 Anta HêFml(L) og at variabeltegnene y og z ikke forekommer i formelen H. Da gjelder: Δ:– ((Ay)£;y(H) <–> (Az)£;z(H)).

Beviset for denne påstanden er av samme type som beviset for Lemma 5.

Vi kan nå vende oss til beviset for Teorem 4. La oss betegne klassen av de Δ;1-gyldige formlene i L med "Val;(Δ;1)".

(a) Anta F, F–>GêVal;(Δ;1). Da finnes det variabler y,z slik at Δ:– E;y(F) og Δ:– E;z(F–>G). Fra det siste følger:
(1) Δ:– M(z) & Konj/i,1,q/(I(a;i,z)) –> .£;z(F) –> £;z(G).
Fra det første følger:
(2) Δ:– M(y) & Konj/i,1,p/(I(b;i,y)) –> £;y(F)
Fra dette følger ved hjelp av Lemma 5 at
(3) Δ:– M(z) & Konj/i,1,p/(I(b;i,z)) –> £;z(F)
Nå er det klart at de fri variablene og konstantene som forekommer i F er blandt dem som forekommer i F –>G. Vi har derfor at b;1,....,b;p er blandt a;1,...,a;q.
La c;1,...,c;r være de fri variablene som forekommer i G. Også disse må naturligvis være blandt a;1,...,a;q. Det følger fra dette, (1) og (3) at vi må ha:
(4) Δ:– M(z) & Konj/i,1,r/(I(c;i,z)) –> £;z(G)
Dette innebærer at Δ:– E;z(G), med andre ord at GêVal;(Δ;1).

(b) Vi viser at Val;(Δ;1) er lukket under R2. Anta FêVal;(Δ;1). Da finnes det et variabeltegn y som ikke forekommer i F slik at Δ:– E;y(F). Dette innebærer: (1) Δ:– M(y) & Konj/i,1,p/(I(a;i,y)) –> £;y(F).
Fra (1) følger:
(2) Δ:– M(y') & Konj/iê{1,...p}–{j}/(I(a;i,y')) –> (Ax)(I(x,y') –> £;y'(F))
I det vi kan anta at x= a;j og at y' er en variabel som ikke forekommer i (Ax)F. Fra (2) følger imidlertid Δ:– E;y'((Ax)F). Dette innebærer at (Ax)FêVal;(Δ1).

(c) Vi beviser at Val;(Δ;1) er lukket under R4. Anta FêVal;(Δ;1). Da har man (1) Δ:– M(y) –> £;y(F) der y et variabeltegn som ikke forekommer i F. Ved hjelp av Lemma 5 og 6 har vi da, om z er et variabeltegn som alfabetisk sett kommer senere enn y: Δ:– M(z) –> £;z(F). Men dette impliserer:
Δ :– M(w) –> (Az)(M(z) & Alt(z,w) –> £;z(F))
der w er det variabeltegn som kommer umiddelbart før z i ordningen av variablene. (Vi kan sørge for å velge ut z slik at det befinner seg minst et variabeltegn mellom z og y i ordningen). Men da har vi Δ:– E;w(Nec(F)). Herav følger så Nec(F)êVal;(Δ;1).

(d) Vi skal vise at Val;(Δ;1) er lukket under R4. Anta derfor:
(1) Δ:– E;w(F;1&...&F;n –> G) der w er et variabeltegn som ikke forekommer i F;1&...&F;n–>G og vi dessuten har at alle de fri variablene og konstantene som forekommer i G forekommer i F;1,....,F;n. Vi lar nå c;<1,i>,....,c;<1;i,i> betegne de konstantene og fri

variablene som forekommer i F;i (1;i≥0). Videre lar vi c;<1,n+1>,....,c;<1;(n+1),n+1> betegne de konstantene og fri variablene som forekommer i G. Fra (1) følger:

(2) Δ:– M(w)& Konj/i,1,n+1/(Konj/k,i,1;i/(I(c;<k,i>,w))) –>
£;w(F;1) & ...&£;w(F;n) –> £;w(G)

På den annen side må vi ha:

(3) Δ:– E;w'(Nec(F;1)&...&Nec(F;n) –> Nec(G)) =
M(w') & Konj/i,1,n+1/(Konj/k,i,1;i/(I(c;<k,i>,w'))) –>.
(Aw)(M(w) & Alt(w,w') –>. Konj/k,1,1;1/(I(c;<k,1>,w)) &£;(F;1)) &....
(Aw)(M(w) & Alt(w,w') –>. Konj/k,1,n;1/(I(c;<k,n>,w)) &£;(F;n)) –>
(Aw)(M(w) & Alt(w,w') –>. Konj/k,1,n+1;1/(I(c;<k,n+1>,w)) &£;(G))

Ved hjelp av Lemma 6 har vi fra (2):

(4) Δ:– M(w')& Konj/i,1,n+1/(Konj/k,i,1;i/(I(c;<k,i>,w'))) –>
£;w'(F;1) & ...&£;w'(F;n) –> £;w'(G)

Det skulle ikke være så vanskelig å se at (4) impliserer (3) når man husker på at alle de fri variablene og konstantene i G også forekommer i F;1,...,F;n. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 4. **Q.E.D.**

Fra Teorem 3 og 4 følger:

Teorem 5.1 Th;K Inkl Val;(Δ;1)

Dette er vårt viktigste resultat så langt.

Klassen av de Δ;2-gyldige formlene i L betegner vi med Val;(Δ;2). Vi har også:

Teorem 5.2 Th;K Inkl Val;(Δ;2)

Bevis: Anta FêTh;K. I lys av Teorem 5 må man da ha (1) Δ:– E;y(F) for en eller annen variabel y som ikke forekommer i F. La w være den første variablen som ikke forekommer i F. Ved hjelp av Lemma 5 og Lemma 6 følger da fra (1) at
Δ:– E;w(F) og derfor Δ:– (Aw)E;w(F). Men da følger Δ:– (E;w(F));w[a;0] og herav E;(a;0)(F). Dette innebærer at FêVal;(Δ;2). **Q.E.D.**

Definisjon 11 Vi kaller en formelmengde ∑ Inkl Fml(L) for en K-logikk hvis og bare hvis den inneholder alle instanser i L av aksiomskjemaene (i) – (viii) i Definisjon 6 og dessuten er lukket under slutningsreglene R1 – R4.

Gitt denne definisjonen har man umiddelbart fra det vi har vist ovenfor:

Teorem 6 Val;(Δ;1) og Val;(Δ;2) er K-logikker.

Vi har nå gitt en tolkning av teorien Th;K inn i teorien Δ. Man kan i så fall gå videre å spørre om tolkningen er en troverdig tolkning, det vil si om man har:

¬(FêTh;K) –> ¬(Δ:– E;y(F)) om F er en formel i L.

Faktisk kan man bevise dette. Imidlertid er beviset forholdsvis langt (selvom det ikke er spesielt krevende) og det er nødvendig med en del forberedelser.

Definisjon 12 La R være en første-ordens struktur for L* i det vi antar at L er et modallogisk språk. Vi sier da at R er en Δ-normal første-ordens struktur for L* hvis og bare hvis R er en modell for teorien Δ. Klassen av Δ-normale første-ordens strukturer for L* betegner vi med "Norm;Δ(L*)".

I Del I av vårt essay om fullstendighetsresultater for en del modalkalkyler, Rognes [2], har vi betraktet en klasse av Kripke-modeller for et noe rikere språk enn L. Klassen av disse Kripke-modellene begrenset til L, dvs. med alt utstyr fjernet som har med bestemte beskrivelser, funksjonssymboler og singulære termer i snever forstand å gjøre, kaller vi for Kripke-1-modellene for L. Vi betegner klassen av denne typen modeller for L med "Kripke;1(L)". I forbindelse med denne typen av modeller bruker vi all den notasjonen og terminologien som vi innførte i Rognes [2]. Man ser at kalkylen K som er beskrevet ovenfor er et fragment av kalkylen QK som ble introdusert i Rognes [2]. Ved å sløyfe en del avsnitt i fullstendighetsbeviset for QK er det lett å se at man kan bevise, og at vi i Del I i Rognes [2] i det vesentlige allerede har bevist, den følgende sats:

Teorem 7 Anta FêFml(L) hvor L er et modallogisk språk. Da gjelder:
FêTh;K <–> FêVal;L(Kripke;1(L))

Merk at "Val;L(X)", der X er en klasse med Kripke-modeller for L, betegner mengden av alle de formlene i L som er gyldige i alle modellene i klassen X.

Vi skal nå definere en funksjon p som til enhver Kripke-1-modell R for L tilordner R en Δ-normal første-ordens struktur for L*. Med andre ord ønsker vi å definere en avbildning p der vi har:

p: Kripke;1(L) –> Norm;Δ(L*)

Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 13 Anta RêKripke;1(L). Da er R =<<G,K,¶, *f*,*>,I,∏> hvor M= <G,K,¶, *f*,*> er en modellstruktur, I en intepretasjon assosiert med M og L og ∏ er en valuasjonsfunksjon for L assosiert med modellstrukturen M og intepretasjonen I.[1] Vi gjør oppmerksom på at K er en ikke-tom mengde, GêK. Videre er ¶ Inkl KxK og *f* en funksjon som til ethvert element i K tilordner en ikke-tom mengde.

Vi definerer en første-ordens struktur p(R) bestemt av R ved de følgende klausuler:

(1) |p(R)| = K U UN/xêK/(*f*(x))
(2) p(R)(A) = Mg(<x,y>: <x,y>ê¶)
(3) p(R)(M) = K
(4) p(R)(a;0) = G
(5) p(R)(I) = Mg(<x,y>: xê*f*(y) & yêK)
(6) p(R)([P]) = Mg(<x;1,...,x;n,y>: <x;1,...,x;n>êI(P,x) &xêK) om P er et n-ært predikat i L.
(7) p(R)(P) = Mg(<x;1,....,x;n>: I(P,G)) om P er et n-ært predikat i L
(8) p(R)(e) = I(e,G) om eêConst(L)
(9) p(R)([=]) = Mg(<x,y,z>: <x,y>êI(=,x) & xêK)
(10) p(R)(e) = I(e,G) om e er en konstant i L.

Vi kan nå bevise den følgende sats:

Teorem 8 Anta RêKripke;1(L). Da er p(R) en modell for teorien Δ, dvs. at vi har for alle FêFml(L*) at dersom Δ:– F så er FêVal;(L*)(p(R)).

Bevis: Anta R = <<G,K,¶, *f*,*>,I,∏> êKripke;1(L). Det er nok å verifisere at alle aksiomene som er nevnt i Definisjon 5 er gyldige i p(R). Vi bruker i det følgende "B" som forkortelse for "p(R)". Merk at vi bruker de samme navnene i R og p(R). Er i et navn i

[1] Se i denne forbindelse Rognes [2], Del I, §1, Definisjon 1.1 – 1.3.

L*(p(R)) betegner ¢(i) det objektet i p(R) som i er et navn på. Er x et element i domenet til p(R) betegner
"¢;-1(x)" navnet på x.

(a) Vi har B:= M(a;0) fordi B(a;0) =GêK = B(M). Dette viser at aksiom (i) i Definisjon 5 er gyldig i B.

(b) Man må vise at B:= (Ax)(Ay)(I(x,y) –> M(y)). La i,j være vilkårlige navn i L*(p(R)). Da har man B(I(i,j))=1 hvis og bare hvis
<¢(i),¢(j)>êp(R)(I) = Mg(<x,y>: xê*f*(y) & yêK). Dette innebærer at ¢(j)êK=B(M). Men da B(M(j)) = 1. Dette viser at aksiom (ii) er gyldig.

(c) Det er nødvendig å bevise B:= (Ay)(M(y) –> (Ex)(I(x,y))). La derfor i være et vilkårlig navn i L*(B) og anta B(M(i))=1. Dette impliserer i lys av definisjonen av B at ¢(i)êK. I lys av definisjonen av R er da *f*(¢(i)) ikke-tom og det finnes derfor et eller annet navn j slik at ¢(j)ê*f*(¢(i)). I lys av definisjonen av p(R) har man da B(I(j,i))=1. Det følger at B((Ex)(I(x,j)) = 1. Dette viser at aksiom (iii) er gyldig i B.

(d) La i;1,....,i;n og j være navn i L*(B) og anta B(M(j))=1 og dessuten at B([P](i;1,...,i;n,j)=1. Da har vi ¢(j)êK og <¢(i;1),....,¢(i;n)>êI(P,¢(j)). Siden vi i en Kripke-modell av den typen det er talle om her har I(P,x) Inkl *f*(x)^n om xêK har vi at ¢(i;k)ê*f*(¢(j)) for k=1,...,n. Men da B(I(i;k,j))=1 for k=1,...,n. Dette viser at aksiom (iv) i Definisjon 5 er gyldig i B.

(e) Anta i;1,...,i;n er navn i L*(B) og at B(Konj/k,1,n/(I(i;k,a;0)))=1. Da har man ¢(i;k)ê*f*(G) for k=1,...,n. I lys av definisjonen av R og p(R) må man da ha B(P(i;1,...,i;n)) =1 <–> <¢(i;1),...,¢(i;n>êI(P,G) <–> B([P](i;1,...,i;n,a;0)=1. Dette viser at aksiom (v) er gyldig i B.

(f) Istedet for å vise at aksiomene (v) – (viii) er gyldige i B viser vi bare at aksiom (x) er det. Dette er åpenbart tilstrekkelig. La derfor i;1,i;2,j være vilkårlige navn i L*(B) og anta (1) B(M(j))=1 & B(I(i;1,j)&I(i;2,j))=1. Da har vi
(2) ¢(j)êK & ¢(i;1),¢(i;2)ê*f*(¢(j)). Man må da åpenbart ha siden RêKripke;1(L) at B([=](i;1,i;2,j))=1 <–> B(i;1=i;2)=1. Dette vise at (x) er gyldig i B.

Det skulle være åpenbart at aksiom (ix) i Definisjon 5 er gyldig i B. Leseren kan, om det er ønskelig, verifisere dette. Dette avslutter beviset for Teorem 8. **Q.E.D.**

Merk at man i en Kripke-modell R=<<G,K,¶, *f*,*>,I,∏>êKripke;1(L) har om e er en konstant i L at det følgende holder:

(Aw)(Aw')(w,w'êK –> ∏(e,w) = ∏(e,w')) og dessuten at ∏(e,w)ê*f*(G) for alle wêK. Er R som ovenfor, e en konstant i L og wêR sier vi at e har en referanse i verdenen w hvis og bare hvis ∏(e,G)ê*f*(w). Det bør også bemerkes at i en Kripke-modell kan de forskjellige individområdene *f*(w) for wêK overlappe hverandre. Man kan ha f.eks. *f*(w)Ωf(w')=ø for visse w,w'êK, såvel som det motsatte. Har man imidlertid *f*(w)Ω*f*(G)=ø må man ha at ¬(∏(e,w')ê*f*(w)) for alle wêK.

Vi skal nå bevise det følgende viktige teorem:

Teorem 9 Anta RêKripke;1(L). Anta videre at wêK(R) og at FêCFml(L(*f*;R(w))). Anta dessuten at alle de konstantene som opptrer i F og som ikke er navn har referanse i w. Da gjelder:

R(F,w) = p(R)((£;y(F));y[¢;-1(w)])

Merk at her ¢;-1(w) navnet på w. Er wêK;R vil w være et objekt i domenet til første-ordens strukturen p(R).

Under forutsetningene i Teorem 9 er det også lett å se at man må ha p(R)((E;y(F));y[¢;-1(w)]) = p(R)((£;y(F));y[¢;-1(w)]). Derfor har man også:

Teorem 10 Anta RêKripke;1(L). Anta videre at wêK(R) og at FêCFml(L(*f*;R(w))). Anta dessuten at alle de konstantene som opptrer i F og som ikke er navn har referanse i w. Da gjelder:

R(F,w) = p(R)((E;y(F));y[¢;-1(w)])

Bevis for Teorem 9: Beviset er ved induksjon på lengden av F. Vi bruker i dette beviset "B" som forkortelse for "p(R)". Istedet for å bruke den mer klumsete skrivemåten "(£;y(F));y[¢;-1(w)]" skriver vi "£;¢;-1(w)(F)"

(a) Anta F = P(d;1,...,d;n) der d;1,...,d;n enten er konstanter eller navn i L(*f*;R(w)). Fra forutsetningene følger at P(d;1,...,d;n) må ha en sannhetsverdi i w. Nå har man:

R(P(d;1,...,d;n),w) =1 <–> <R(d;1,w),...,R(d;n,w)>êR(P,w)
<–> <R(d;1,w),...,R(d;n,w),w>êB([P])
<–> B([P](d;1,....,d;n,¢;-1(w)))=1
<–> B(£;c(w)(P(d;1,...,d;n)))=1

(b) Anta F = ¬H. Vi har da:

R(¬H,w) =1 <–> R(H,w) =0
<–> B(£;¢;-1(w)(H)) =0 (Induksjonshypotese)
<–> B(¬£;¢;-1(w)(H)) =1
<–> B(£;¢;-1(w)(¬H)) =1

(c) Anta F =(G–>H). Da har man:

R(G –>H,w) =1 <–> R(G,w)=1 –> R(H,w)=1
<–> R(£;¢;-1(w)(G))=1 –> R(£;¢;-1(w)(H)) =1 (IH)
<–> R(£;¢;-1(w)(G) –> £;¢;-1(w)(H)) =1
<–> R(£;¢;-1(w)(G –> H)) =1

(d) Anta F=(Ax)H. Da har man:

R((Ax)H, w) = 1 <–> (Ai)(¢(i)ê*f*(w) –> R(H;x[i],w)=1)
<–> (Ai)(B(I(i,¢;-1(w)))=1 –> B(£;c;-1(w)(H;x[i]))=1)
<–> (Ai)(B(I(i,¢;-1(w)) –> (£;c;-1(w)(H));x[i])
<–> B((Ax)(I(x,c;-1(w)) –> £;¢;-1(w)(H)))=1
<–> B(£;¢;-1((Ax)H))=1

(e) Anta F = Nec(H). La d;1,....,d;n være de konstantene og navnene som dukker opp i F. Da har man på den ene side:

(0) B(£;¢;-1(Nec(H)) =1 <–> (Ai)(¢(i)êK & <w,i>ê¶ –> .
Konj/i,1,n/(B(d;i)ê*f*(¢(i))) & B(£;i(H))=1)
<–> (Aw')(w'êK &<w,w'>ê¶ –>
Konj/i,1,n/(B(d;i)ê*f*(w')) & B(£;¢;-1(w')(H))=1)

På den annen side har man:

(1) R(Nec(H),w) =1 <–> (Aw')(<w,w'>ê¶ –> R(H,w')=1)

Vi må vise at høyre side i (1) er ekvivalent med høyre side i (0). Anta først at w'êK &<w,w'>ê¶ for vilkårlig w' og dessuten at:

(Aw')(<w,w'>ê¶ –> R(H,w')=1). Da følger R(H,w')=1. Da har H en sannhetsverdi i w'. Det følger derfor at Konj/i,1,n/(B(d;i)ê*f*(w')). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger også B(£;¢;-1(w)(H))=1. Det følger at høyre side i (0) holder. Derfor B(£;¢;-1(Nec(H)) =1.

Anta på den annen side R(Nec(H),w) =0. Da finnes w' slik at

(2) <w,w'>ê¶ & R(H,w')≠1 &w'êK. Tilfelle (i): H er uten sannhetsverdi i w'. Da har man ¬(B(d;i)ê*f*(w')) for noe iê{1,...,n}. Da følger ved hjelp av (0) at B(£;¢;-1(Nec(H)) =1. Tilfelle (ii): Da har H sannhetsverdi i w'. Det følger i så fall at

R(H,w')=0 i lys av (2). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger
B(£;¢;-1(w')(H))=0. Men siden w'êK & <w,w'>ê¶ følger ved hjelp av (0) at B(£;¢;-1(Nec(H)) =1 som er det vi ønsker. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Vi kan nå bevise:

Teorem 11 Val;(Δ;2) Inkl Th;K

Bevis: Anta ¬(FêTh;K). I lys av Teorem 7 finnes det da en RêKripke;1(L) slik at ¬(R:= F). Dette impliserer at det finnes navn i;1,....,i;n slik at
H = F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] & R(H,G)=0. I lys av Teorem 10 har vi da p(R)(E;¢;-1(G)(H))= p(R)(E;(a;0)(H)) =0. Men p(R) er en modell for Δ. Følgelig må man ha ¬(Δ:– E;(a;0)(F)). Dette innebærer at ¬(FêVal;(Δ;2)). **Q.E.D.**

Ved hjelp av Teorem 6 og Teorem 11 følger:

Teorem 12 Val;(Δ;2) = Th;K

Denne satsen impliserer at E;(a;0) representerer en "troverdig" intepretasjon av Th;K inn i Δ. Vi anser Teorem 12 for et hovedresultat så langt.

Vi har inkludert vanlig identitet i språket L*. Denne relasjonen synes umulig å unnvære dersom man ønsker å uttrykke slike påstander som f.eks. at det finnes to distinkte mulige verdener, eller at det finnes en mulig verden som er et alternativ til den aktuelle verden og som er forskjellig fra denne. Påstander av denne typen kan ikke uttrykkes ved hjelp av den "verdensrelative" identitetsrelasjonen [=]. Det er imidlertid mulig å sløyfe den "absolutte" relasjonen "=" og istedet for aksiom (x) og (viii) i Definisjon 5 bruke:

(xi) M(w) & M(y) & Alt(w,y)& I(z;1,w). –>. [=](z;1,z;2,w) <–> [=](z;1,z;2,y)

Dette aksiomet uttrykker at dersom w,y er mulige verdener, w et alternativ til y, z;1 identisk med z;2 i verdenen y og z;1 er et individ i w så er z;1 identisk med z;2 i verdenen w. Videre at dersom w,y er mulige verdener, w et alternativ til y, z;1 identisk med z;2 i verdenen w og z;1 er et individ i w så er z;1 identisk med z;2 i verdenen y.
En svakere versjon av (xi) er:

(xii) M(w) & M(y) & Alt(w,y)& I(z;1,w) & [=](z;1,z;2,y) –> [=](z;1,z;2,w)

Vi skal kommentere denne versjonen litt senere. Ser vi nå på språket L*–, nemlig L* med identitetsrelasjonen fjernet, så kan man betrakte første-ordens teorien i L*– hvor de ikke-logiske aksiomene er (i) – (vii), (ix) og (xi). Denne teorien skal vi her kalle Δ'. Argumentet som vi ovenfor ga til fordel for
Teorem 12 kan lett modifiseres til et bevis for den følgende sats:

Teorem 12.1 Th;K = Mg(F: FêFml(L) & Δ':– E;(a;0)(F))

Dette innebærer at Th;K kan intepreteres troverdig inn i Δ'.[2]

[2] Det bør understrekes at Δ' er en første-ordens teori uten identitet. [=] er ikke noe identitetspredikat i vanlig betydning.

Klassen av Kripke-modeller med individuerende funksjoner, den klassen av modeller for L som ble avgrenset ved Definisjon 9.1 – 9.3 i §9 i Rognes [2], betegner vi med Kripke;2(L). Vi kaller første-ordens teorien i L*– som har som de eneste ikke-logiske aksiomene (i) – (vii), (ix) i Definisjon 5, og formelen (xii) nevnt rett ovenfor, for Δ;e. Vi kaller mengden av alle instanser i L av aksiomskjemaene (i) – (viii), (x) og (xi) for AxK;e. ThK;e er den minste mengden X av formler i L som inneholder AxK;e og som er lukket under slutningsreglene R1 – R4. Man kan bevise:

Teorem 13 ThK;e = Val;L(Kripke;2(L))

Et bevis for denne påstanden er i det vesentlige gitt i Del II av Rognes [2]. ThK;e kan trolig intepreteres troverdig inn i Δ;e. Man har altså at:

(+) ThK;e = Mg(F: FêFml(L) & Δ;e :– E;(a;0)(F))

Det er forholdsvis lett å vise inklusjonen mot høyre i (+). For å bevise inklusjonen mot venstre må man bruke Teorem 13. Før vi gir et bevis for dette er det imidlertid hensiktsmessig å innføre en klasse av modeller for L*–, nemlig klassen av "uortodokse modeller" for L*–.

Definisjon 14 Med en uortodoks modell for L*– forstås en struktur B = <G,K,¶, f,D> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) K er en ikke-tom mengde.
(ii) G er et element i K, ie. GêK
(iii) ¶ er en relasjon over K ie. ¶ Inkl KXK
(iv) D er en ikke-tom mengde funksjoner der alle funksjonene har K som domene.
(v) f er en funksjon som til hvert element HêK tilordner H en ikke-tom delmengde av D. Man har altså at f(H) er en ikke-tom mengde for alle HêK. Vi bruker "Q(H)" for "Mg(x: (Ef)(fêf(H) & x= f(H)))".

B tilordner de enkelte ikke-logiske symbolene i L*– referanse og ekstensjon etter de følgende regler:

(1) B(e) êf(G) om e er en konstant i L*–
(2) B([=]) = Mg(<x,x,w>: wêK & xêQ(w))
(3) B([P]) Inkl Mg(<x;1,...,x;n,y>: x;1,...,x;nêQ(y) & yêK) om P er et n-ært predikat i L.
(4) B(P) = Mg(<x;1,....,x;n,G>: <x;1,...,x;n,G>êB([P]))
(5) B(M) = K
(6) B(I) = Mg(<x,y>: xêf(y) & yêK)
(7) B(Alt) = ¶

Vi bruker navn på alle elementene UN/xêK/(f(x)) UK. Vi bruker i,j som syntaktiske variabler for navn. Er i et navn lar vi B(i) være det objektet i er et navn på.

Sannhetsverdien til en formel F êCFml(L*–(C)) der C=UN/xêK/(f(x)) UK er definert induktivt slik, idet a,b,c, a;1,....,a;n enten er konstanter eller navn:

(1.1) B(M(a)) =1 <–> B(a)êB(M)
(1.2) B(I(a,b)) =1 <–> B(a)êf(B(b)) & B(b)êK
(1.3) B(Alt(a,b))=1 <–> <B(a),B(b)>êB(Alt)
(1.4) B([=](a,b,c))= 1 <–> <B(a)(B(c)), B(b)(B(c)),B(c)>êB([=])
(1.5) B([P](a;1,....,a;n,b))=1 <–> <B(a;1)(B(b)),....,B(a;n)(B(b)), B(b)>êB([P])
(1.6) B(P(a;1,...,a;n)) =1 <–> <B(a;1)(G),...,B(a;n)(G),G>êB(P)
(1.7) B(¬F) = 1 <–> ¬(B(F) =1)
(1.8) B(F–>G)=1 <–> (B(F)=1 –> B(G)=1)

(1.9) B(Ax)F) =1 <–> B(F;x[i])=1 for ethvert navn i som er et navn på et element i domenet til B som er UN/xêK/(f(x)) UK.

Bemerkning: Vi sier at en formel F er gyldig i en uortodoks modell B hvis og bare hvis man har at B(F')=T for enhver B-instans F' av F, dvs. hvis og bare hvis enhver formel av typen F'= F;(x;1,....,x;n)[i;1,...,i;n], der i;1,...,i;n er navn i L*–(B), er slik at B(F')=1.

Merk at navnene i en uortodoks modell B = G,K,¶, f,D> er navn på de individene i UN/xêK/(f(x))UK, dvs. at de er navn enten på de individuerende funksjonene eller på mulige verdener. I forbindelse med en uortodoks modell B for L*– krever vi dessuten at den oppfyller det følgende krav:

(K) w,w'êK & f;1,f;2êf(w) & f;1êf(w') & <w,w'>ê¶ & f;1(w)=f;2(w). –> f;1(w') = f;2(w')

Vi kaller dette kravet for ikke-forgreningskravet. Pålegger man modellene dette kravet vil (xii) ovenfor være gyldig i enhver uortodoks modell.

Man kan bevise den følgende sats:

Teorem 14 Anta B er en uortodoks modell for L*–. Da er B en modell for Δ;e.

Beviset for dette teoremet er i det vesentlige helt rutinemessig og detaljene overlates til leseren. Man bør imidlertid huske på at dersom F, F–>G er gyldige i en uortodoks modell B så er G og (Ax)F det også. Videre er det lett å verifisere at alle de vanlige setningslogiske og kvantifikasjonsteoretiske aksiomene er gyldige i enhver uortodoks modell B.

Definisjon 15 Anta R=< <G,K,¶, f,D>,I,∏> êKripke;2(L) der L er et modallogisk språk. Med p(R) forstår vi en uortodokse modellen for L*– som er definert ved at man krever:

(1) p(R) = <G,K,¶, f,D>
(2) p(R)(e) = R(e,G) om e er en konstant i L
(3) p(R)([P]) = Mg(<x;1,...,x;n,y>: <x;1,...,x;n>êR(P,y))
(4) p(R)(P) = Mg(<x;1,...,x;n,G>: <x;1,...,x;n>êR(P,G))

Det er nå mulig å gi bevis for det følgende viktige teorem:

Teorem 15 Anta R=< <G,K,¶, f,D>,I,∏> êKripke;2(L) og at wêK. La FêCFml(L') der L' er L utvidet med navn på individene i f(w). Anta videre at alle konstantene som opptrer i F og som ikke er navn har referanse i w. Da gjelder:

(i) R(F,w) = p(R)(£;(¢;-1(w))(F))
(ii) R(F,w) = p(R)(E;(¢;-1(w))(F))

Beviset for denne satsen er i det vesentlige som bevisene for Teorem 9 og Teorem 10. Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler. Alle induksjons-trinnene er som i beviset for Teorem 10 bortsett fra trinnet for atomære formler.
Oppgaven som består i å verifisere (i) og (ii) når F er en atomær formel i L*– overlates til leseren.

Vi kan nå bevise det følgende teorem:

Teorem 16 ThK;e = Mg(F: FêFml(L) & Δ;e :– E;(a;0)(F))

Bevis: Inklusjonen mot høyre er lett å bevise og krever ikke noen spesielle kommentarer. Inklusjonen mot venstre: Anta ¬(FêThK;e). I lys av Teorem 13 finnes det da en RêKripke;2(L) slik at ¬(R:= F). Dette impliserer at det finnes navn i;1,....,i;n slik at H = F; (x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] & R(H,G)=0. I lys av Teorem 15 har vi da p(R)(E;¢;-1(G)(H))= p(R) (E;(a;0)(H)) =0. Men p(R) er en modell for Δ;e. Følgelig må man ha ¬(Δ;e :– E;(a;0)(F)). **Q.E.D.**

Vi har nå i hovedsaken fullførtvåre undersøkelser når det gjelder tolkninger av modallogiske språk L av den typen vi startet med inn i L* eller L*–. Modallogiske språk i den betydning vi har arbeidet med her har bare hatt en primitiv modaloperator, nemlig nødvendighetsoperatoren Nec. Vi skal nå tenke oss at modallogiske språk inneholder, i tillegg til Nec, en primitiv mulighets-operator, Pos. Når det gjelder mulighetsoperatoren var valuasjonsregelen for den i Kripke-modeller R av den typen som ble innført i Rognes [2] slik:

(1) R(Pos(F),w) =1 hvis og bare hvis (Ew')(<w,w'>ê¶ & R(F,w')=1) forutsatt at Pos(F) har en sannhetsverdi i w.

Ønsker vi nå å intepretere modallogiske språk av den litt mer omfattende typen som nå er nevnt inn i L* må vi utvide oversettelsesfunksjonen £;y slik at vi også kan oversette formler som inneholder mulighetsoperatoren. I definisjonen av £;y tenker vi oss derfor at man føyer til den følgende klausul:

(2) £;y(Pos(F)) = (Ew)(M(w) & Alt(w,y) & Konj/i,1,n/(I(a;i,w)) & £;y(F))
der w er den først variablen etter y i den alfabetiske ordningen av variabeltegn og a;1,...,a;n er de fri variablene og konstantene som forekommer i F.

Gitt denne valuasjonsregelen følger det at vi må ha:

(3) £;y(¬Pos(¬F)) = (Aw)(M(w) & Alt(w,y) & Konj/i,1,n/(I(a;i,w)) –> £;y(F))
der w er den først variablen etter y i den alfabetiske ordningen av variabeltegn og a;1,...,a;n er de fri variablene og konstantene som forekommer i F.

For modallogiske språk L i denne litt videre betydningen definerer vi hva som menes med Δ;3-gyldig formel slik:

Definisjon 16 Val;(Δ;3) = Mg(F: FêFml(L) & Δ:– E;(a;0)(F))

I tillegg til de aksiomene og slutningsreglene som ble nevnt i Definisjon 6 er nå de følgende formler og slutningsregler Δ;3-gyldige:

Definisjon 6.2

(xii) Nec(F) –> ¬Pos(¬F)
(xiii) (¬Pos¬(F–>G)) –> (¬Pos(¬F) –> ¬Pos(¬G)) forutsatt at enhver fri variabel som forkommer i F forekommer fri i G og at enhver konstant som forekommer i F forekommer i G.
(xiv) ¬Pos(¬(F;1&....&F;n & G.–> E)).–>

(¬Pos(¬F;1) &....&¬Pos(¬F;n) & Nec(G). –>. ¬Pos(¬E)
forutsatt enhver fri variabel som forekommer i en av F;1,...,F;n forekommer fri i G eller E og at enhver konstant som forekommer i en av F;1,...,F;n forekommer i enten G eller E.

(xv) Nec(F) –> (¬Pos(¬G) <–> Nec(G)) forutsatt at enhver fri variabel i G forekommer fri i F og enhver konstant som forekommer i G også forekommer i F.

(xvi) x≠y –> ¬Pos(¬(x ≠ y))

(xvii) ¬Nec(F) –> ¬Nec(¬(Ax)(x=x))

Slutningsregler:

R5 :– F –> :– ¬Pos(¬F)

R6 : – (F–>G) –> :– Pos(F) –> Pos(G) forutsatt at enhver variabel som forekommer fri i G også forekommer fri i F og enhver konstant som forekommer i G også forekommer i F.

Definisjon 17 Vi kaller klassen av alle instanser av aksiomskjemaene (i) – (xvii) i L for AxQK°, QK°-aksiomene i L. Den minste formelmengden i L som er lukket under R1 – R6 og som dessuten inneholder AxQK° betegnes med ThQK°, QK°-teoremene i L.

I Del I i Rognes [2] har vi i det vesentlige bevist den følgende sats:

Teorem 17 ThQK° = Val;L(Kripke;1(L)

Definisjon 18 Vi kaller klassen av alle instanser av aksiomskjemaene (i) – (vii), (viii), (x), (xi), (xii) – (xv) og (xvii) for QK°*-aksiomene i L, AxQK°*. Den minste formelmengden i L som er lukket under R1 – R6 og som inneholder AxQK°* kaller vi for QK°*-teoremene i L. Denne mengden betegnes med "ThQK°*".

Vi lar Δ være definert som før. Δ;e lar vi også være definert som tidligere. Δ;e er altså en teori i språket L*–. Det er nå muligå bevise:

Teorem 19 AxQK° Inkl Val;(Δ;3)

Teorem 20 ThQK° Inkl Val;(Δ;3)

Teorem 21 ThQK°* Inkl Mg(F: FêFml(L) & Δ;e :– E;(a;0)(F))

Merk at vi setter per definisjon Val;(Δ2;e) = Mg(F: FêFml(L) & Δ;e :– E;(a;0)(F)). Beviset for Teorem 19 er analogt med beviset for Teorem 3. Når det gjelder beviset for Teorem 20 er dette av samme type som beviset for Teorem 5. Vi må i tillegg verifisere at alle instanser av (xii) – (xvii) er med i Val;(Δ;3) og at Val;(Δ;3) er lukket under R5 og R6. Intet skaper noen spesielle problemer.

Vi kan også bevise det følgende:

Teorem 22 ThQK° = Val;(Δ;3)

Teorem 23 ThQK°* = Val;(Δ2;e)

Med andre ord kan ThQK° (ThQK°*) intepreteres troverdig i teorien Δ (Δ;e).

Beviset for Teorem 22 er analogt med beviset for Teorem 12. Faktisk kan vi bevise Teorem 9 om vi antar at L inneholder operatoren Pos og valuasjons-regelen for Pos i en RêKripke;1(L) er som ovenfor. Beviset er faktisk som ovenfor, men vi må i tillegg vise at dersom Pos(F)êCFml(L(*f*;R(w))) og om alle konstantene og navnene i Pos(F) har referanse i w så gjelder:

R(Pos(F),w) = p(R)(£;(¢;-1(w))(Pos(F))

Bevis: I dette tilfellet må vi ha R(Pos(F),w)ê{0,1}.

(a) Anta R(Pos(F),w)=1. Da finnes w' slik at (1) <w,w'>ê¶ & R(F,w')=1. Da må F ha en sannhetsverdi i w' og etter induksjonshypotesen har man da (2) p(R)(£;(¢;-1(w'))(F)) =1. La a;1,...,a;n være konstantene og navnene i F. Vi må ha p(R)(a;i) = R(a;i,G)ê*f*(w'). Derfor (3) p(R)(Konj/i,1,n/(I(a;i,¢;-1(w')))=1. Fra (1) har man: (4) p(R)(Alt(¢;-1(w'), ¢;-1(w))) =1 Men fra (2) – (4) følger:
p(R)(£;(¢;-1(w))(Pos(F)) = 1.

(b) Anta R(Pos(F), w)=0 . Da har man (5) for alle w' der <w,w'>ê¶ at R(F,w')=0 eller at F er uten sannhetsverdi i w'. Anta

(6) p(R)(Alt(¢;-1(w'),¢;-1(w)))=1 og at p(R)(a;i)ê*f*(w') for i=1,...,n. Da følger <w,w'>ê¶ og R(a;i,G)ê*f*(w') (i=1,...,n). Da har F sannhetsverdi i w' og man må i lys av (5) at R(F,w')=0. Etter indukdjondhypotesen følger
p(R)(£;¢;-1(w')(F)) =0. Man har altså: p(R)(£;(¢;-1(w))(Pos(F)) =0. **Q.E.D.**

Beviset for Teorem 23 er analogt med beviset for Teorem 15 – 16. Vi gjør tilsvarende tilføyelser i bevisene for Teorem 15-16 som vi nå har gjort i forbindelse med Teorem 9 – 10. Vi anser derfor Teorem 22 og Teorem 23 for etablert.

Referanser

Rognes [1] Rognes, Morten. *Undersøkelser i intensjonal logikk.* Maskinskrevet manuskript, 1973.

Rognes [2] Rognes, Morten. *Fullstendighetsresultater for noen modale predikatkalkyler foreslått av D. Føllesdal og for noen beslektede kalkyler* . Maskinskrevet manuskript, 1973.

Rognes [3] Rognes, Morten. *Resultater om sterk og svak kompletthet for den minimale intensjonale predikatlogikken I;0 og for beslektede ikke-klassiske systemer.* Maskinskrevet manuskript, 1974.

Rognes [4] Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Maskinskrevet manuskript, 1974.

Shoenfield [1] Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967.